التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $n\in\mathbb{N}$: $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+n-1$ و $U_0=1$

1) أ- بين أن $U_n\geq 0$ لكل عدد طبيعي $n\geq 3$

ب- بين أنه إذا كان $n\geq 4$ فإن $U_n\geq n-2$ ماذا يمكن أن تستنتج ؟

2) نضع $V_n=4U_n-8n+24$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أشاشها

ب- أحسب U_n بدلالة n

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=0$ و $U_{n+1}=\frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}}$

1) أ- بين أن $0\leq U_n<\sqrt{3}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

2) نضع $V_n=\frac{U_n^2}{3-U_n^2}$ لكل عدد طبيعي n

بين أن المتتالية $(V_n)_n$ حسابية و حدد U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $U_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{3k-2}{5^k}$

1) تحقق أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

2) أ- بين أن $U_{n+1}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}U_n+\frac{3}{20}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- استنتج أن $(U_n)_n$ مكبورة

3) بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الرابع

لتكن $(U_n)_n$ متتالية حسابية أساسها r . نضع $S_n=U_0+U_1+.......+U_{n-1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ليكن m و n عددين طبيعيين مختلفين .

1) بين أن $S_m=S_n \Leftrightarrow (m+n-1)r=-2U_0$

2) استنتج أن : $S_m=S_n \Rightarrow S_{m+n}=0$

التمرين الخامس

أحسب نهايات المتتاليات التالية : $U_n = 5^n - 3^n$ ، $U_n = \frac{3^n - 1}{8^n - 2}$ ، $U_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$ ،

$U_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ ، $U_n = \frac{(-1)^n + 2n}{2(-1)^n + 5}$ ، $U_n = n + 3\sin(n)$ ، $U_n = \frac{n!}{2^n}$ ،

$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ، $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$ ، $U_n = \frac{3^n + (-2)^{n+1}}{3^n + (-2)^n}$ ، $U_n = \frac{n + 2(-1)^n}{2n + (-1)^n}$

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f_n(x) = x^3 + nx - 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) ادرس رتابة الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,1[$

3) أ- بين أن $f_{n+1}(x) > f_n(x)$: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية و استنتج أن المتتالية $(a_n)_n$ متقاربة

4) أحسب $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ و استنتج أن $0 \le a_n \le \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و حدد نهاية المتتالية $(a_n)_n$

التمرين السابع

I) ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و n عددا طبيعيا بحيث $n \ge 2$

1) نفترض أن $a > 1$. بين أن $\sqrt[n]{a} - 1 \le \frac{a-1}{n}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a}$

2) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a}$ من أجل $0 < a < 1$

II) نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x) = x^n - 1 + \arctan x$

1) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n

2) بين أن المتتالية $(a_n)_{n>0}$ محدودة

3) أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ و أدرس رتابة المتتالية $(a_n)_{n>0}$

4) حدد إشارة $f\left(\sqrt[n]{1 - \frac{\pi}{4}}\right)$ و بين أن المتتالية $(a_n)_{n>0}$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الثامن

بين أن المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متحاذيتين :

$u_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ و $v_n = 2^{n+1} \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ حيث θ من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$